

**В.Л. ДОРОФЕЕВ**, д.т.н., проф., главный научный сотрудник ЦИАМ,  
Москва, Россия;

**В.В. ГОЛОВАНОВ**, начальник отдела зубчатых передач ЦИАМ;

**В.М. АНАНЬЕВ**, к.т.н., ведущий научный сотрудник ЦИАМ

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СПЕКТРА ВИБРАЦИЙ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

Приводится описание метода, позволяющего определить спектральный состав колебаний зубчатой передачи. Зубчатая передача рассматривается как нелинейная система с периодически изменяющейся жесткостью зацепления. Показано, что спектр колебаний зубчатой передачи включает основные частоты внешних колебаний и нулевую частоту статического перемещения. По причине периодического изменения жесткости зубьев каждая основная частота колебаний модулируется двумя гармониками частот пересопряжения зубьев: положительной и отрицательной. В плотном спектре колебаний зубчатой передачи доминантами являются составляющие, кратные зубцовой и оборотным частотам.

Розглянуто питання з визначення спектрального складу коливань зубчастої передачі. Зубчаста передача розглядається як нелінійна система з жорсткістю зацеплення, що періодично змінюється. Показано, що спектр коливань зубчастої передачі включає основні частоти зовнішніх коливань і нульову частоту статичного переміщення. Унаслідок періодичної зміни жорсткості зубців кожна основна частота коливань модулюється двома гармоніками частот пересопряження зубців: позитивною і негативною. У щільному спектрі коливань зубчастої передачі є доміанти ці частоти кратні пересопряженню зубців і кратні оборотним частотам.

In research paper the method has been presented, which allows determining spectral composition of oscillations of the toothed gearing. The toothed gearing is observed as nonlinear system in which mesh stiffness changes periodically. Research paper shows that the toothed gearing vibration spectrum has basic frequencies of external oscillations and zero frequency of static deflection. Because of periodic change of stiffness of teeth's each fundamental frequency of oscillations is modulated by two harmonics of frequencies of an input of teeth's in gearing: positive and negative. In a dense spectrum of fluctuations of the toothed gearing there are dominants these are frequencies multiple a feather to interface of teeth's and multiple to turnaround frequencies.

**Введение.** Диагностика вибраций зубчатых передач часто выполняется путем анализа спектра вибраций. При наличии большого числа источников вибраций, некоторые частоты могут повторяться от различных источников. При совпадении частот разных источников, но разной природы такой метод позволит с большей вероятности сделать правильную диагностику редуктора с зубчатыми передачами. Спектральный анализ позволяет оценивать качество зубчатых передач.

**1. Зубчатая передача, как линейная параметрическая колебательная система.** Зубчатая передача – это колебательная система с периодически изменяющейся жесткостью. Такие системы носят название параметрических.

На рисунке 1 показана одна из расчетных схем зубчатой передачи, применяемой в ЦИАМ для моделирования динамических процессов в авиационных зубчатых передачах.

Каждая пара зубьев в модели заменяется упругостью  $C_{ni}$ , погрешности профиля –  $F_{ri}$ , массы колес  $J_1, J_2$ . Связь между входом и выходом в такой системе устанавливается дифференциальным уравнением, описанным в работе [1]. Но

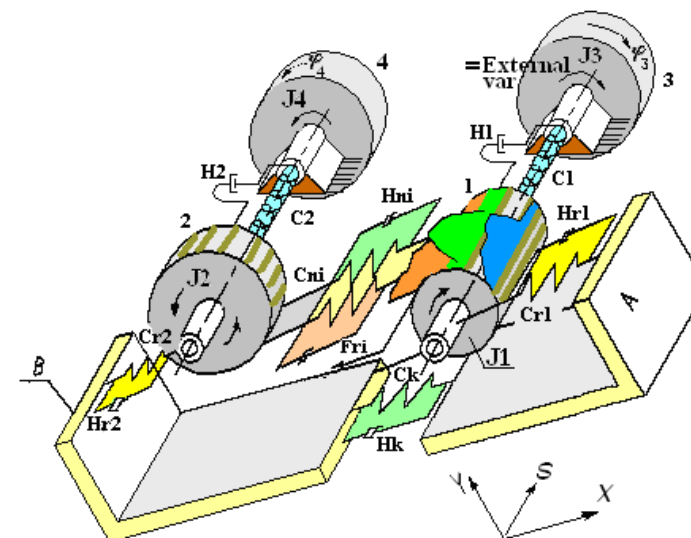


Рисунок 1 – Расчетная схема моделирования напряжений и вибраций в зубчатой передаче с периодически изменяющимся числом зубьев в зацеплении

для целей настоящей работы эта связь может быть выражена в упрощенном виде:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) K(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\omega$  – частота;  $z(t) = x(t) + jy(t)$  – выходной колебательный процесс. Поскольку выражение (1) записано в общем виде, выходом может быть как колебание присоединенной массы  $\varphi_4(t)$ , так и колебания колес, а также силы, действующие на упругие опоры. Символом  $j = (-1)^{0.5}$  обозначена мнимая единица, позволяющая разделить колебания по ортогональным направлениям  $S(\omega)$  – спектральная плотность входного воздействия, возбуждающего колебательную систему зубчатой передачи. Входным воздействием может быть как крутильное колебание  $f_3(t)$ , так и погрешность профиля зубьев  $F_m(t)$ .  $K(j\omega, t)$  – параметрическая передаточная функция колебательной системы, моделирующей зубчатую передачу.

Жесткость зубчатой передачи изменяется по сложному закону поэтому, если разложить параметрическую передаточную функцию в ряд Фурье, она будет выражаться в виде

$$K(j\omega, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} K_m(j\omega) \cos(m\omega_z t + \psi_m), \quad (2)$$

где  $\omega_z$  – частота пересопряжений зубьев,  $m$  – номер гармоники зубцовой частоты;  $\psi_m$  – фаза колебаний. Аргументами функции (2) являются время  $t$  и круговая частота. Круговая частота, имеющая размерность радиан в секунду, связана с частотой колебаний, измеряемой в герцах, соотношением  $\omega = 2\pi f$ .

**2. Метод определения спектрального состава колебаний зубчатой передачи, как параметрической линейной колебательной системы.** Если входное воздействие, например колебание ведущего вала, будет периодическим, то спектральная плотность возбуждения  $S(\omega)$  будет выражаться в виде

$$S(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad (3)$$

где  $\omega_0$  – частота периодических колебаний входного воздействия;  $\delta(\cdot)$  – символ дельта функции Дирака:  $\delta(0)=\infty$ ,  $\delta(\neq 0)=0$ . После подстановки выражений (2) и (3) в уравнение (1) перемножения и интегрирования обобщенных функций получается следующее выражение выходного колебания [2]:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} K_m(\omega_0) [\cos(\omega_0 + m\omega_z)]. \quad (4)$$

Выражение (4) записано упрощенно в действительной форме только для колебаний вдоль оси  $x$ , направленной вдоль линии зацепления.

Таким образом, гармонический спектр колебаний зубчатой передачи может содержать частоту входного колебания, которая модулируется гармониками пересопряжения зубьев.

**3. Зубчатая передача, как нелинейная колебательная система.** Нелинейные процессы в зубчатой передаче проявляются при геометрическом контакте зубьев. На рисунке 2 показано, как изменяется циклическая погрешность при изменении кинематической погрешности.

Как следует из результатов моделирования (рисунок 2), если зубчатую передачу собрать с эксцентрическим смещением осей колес, соответствующим двенадцатой степени точности, но сами колеса изготовить идеально точно, то результирующая циклическая погрешность будет соответствовать девятой степени точности по ГОСТ 1643-81.

Если рассматривать зубчатую передачу, как параметрическую систему, то в такой системе погрешность колес в зацеплении и жесткость зубьев должны зависеть от времени. Фактически функции погрешности и жесткости зависят не от времени, а от угла поворота колеса. Поэтому в строгой формулировке зубчатая передача – это нелинейная система. Но поскольку угол поворота связан со временем почти линейно, многие исследователи рассматривают зубчатую передачу как линейную. Однако это предполагает, что каждому положительному  $\Delta t$  должно сопоставляться также положительное  $\Delta \varphi(t)$  при постоянном коэффициенте пропорциональности между временем и углом поворота. Очевидно, что это условие никогда не соблюдается.

Жесткость зубчатой передачи это также нелинейная функция. Если изгибная составляющая жесткости зубьев линейно зависит от нагрузки, то контактная жесткость имеет нелинейную зависимость, особенно в фазах кромочного зацепления [3].

По перечисленным причинам математическая модель зубчатой передачи должна строиться как нелинейная. Именно такая модель реализована в компьютерных программах типа AsGears [4].

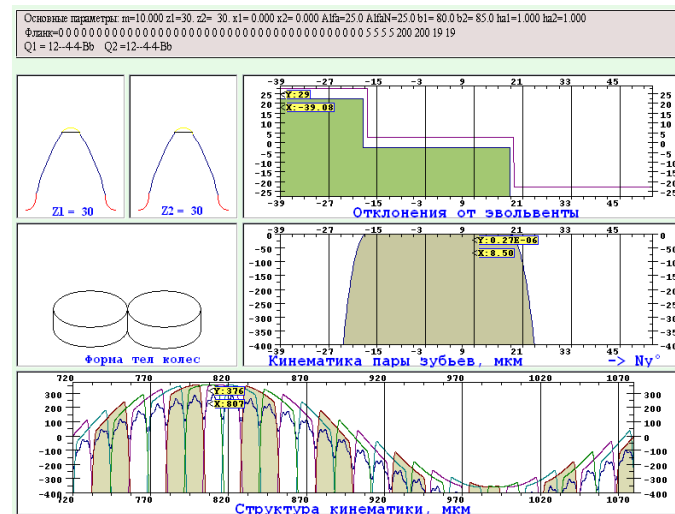


Рисунок 2 – Результат моделирования кинематической погрешности зубчатой передачи

Вблизи резонансных областей работы передачи зубья колес могут замыкаться и ударяться, жесткость зубьев в зацеплении при отрыве зубьев будет равна нулю. В этом случае зубчатая передача является выраженной нелинейной системой. Из теории нелинейных [5] систем следует, что зубчатая передача будет колебаться по следующему закону:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty, n=-\infty}^{m=\infty, n=\infty} K_m(n\omega_0) [\cos(n\omega_0 + m\omega_z)]. \quad (5)$$

Так, если зубчатая передача  $z_1=z_2=30$  имеет частоту вращения 1500об/мин и является линейной параметрической системой, то по формуле (4) в спектре колебаний могут присутствовать следующие частоты колебаний: 25Гц, 750Гц, 725Гц, 775Гц, 1500Гц, 1475Гц, 1525Гц, 2250Гц, 2225Гц, 2275Гц и др. Из перечисленных частот зубцовой, т.е. частотой пересопряжения зубьев, является частота 750Гц. Но, если зубчатая передача колеблется как нелинейная система, то кроме перечисленных частот будут частоты 50Гц, 75Гц, 100Гц, 125Гц, 150 Гц и др. такие, например как 1550Гц, 2300Гц и др.

Таким образом, если пользоваться качественным анализом, то спектр возможных колебаний достаточно широкий и плотный.

**4. Анализ спектрального состава колебаний зубчатой передачи, методом математического моделирования.** Не только частоты, но амплитудный состав колебаний можно получить, используя метод прямого математического моделирования, реализованный в программах типа AsGears. Новые версии программ моделирования включают модуль спектрального анализа, позволяющий определить как частоты колебаний, так и амплитуды спектральных составляющих.

Зубчатая передача, схема которой показана на рисунке 1, описывается не-

линейным дифференциально-интегральным уравнением [1]. Для программ математического моделирования типа AsGears были разработаны методы решения таких уравнений, что позволило выполнять оценку различных физических процессов, протекающие в зубчатых передачах. На рисунке 3 показано применение математического моделирования для расчёта спектрального состава сил, действующих в зацеплении колес в направлении номинальной линии зацепления.

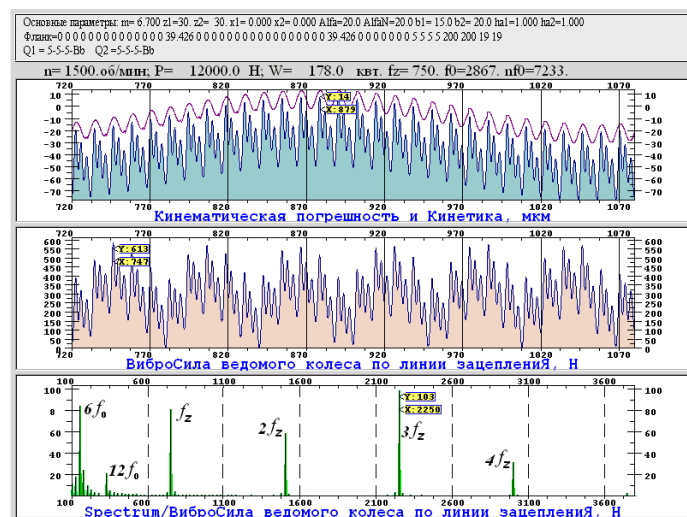


Рисунок 3 – Спектр сил в зацеплении зубчатой передачи

С помощью программы AsGears проектировались и совершенствовались зубчатые передачи редукторов авиационных двигателей: ТВЗ-117ВМА-СБМ1, АИ-222, АИ-436-148, Д27 [6-8] (ГП "Ивченко-Прогресс"), АЛ-31Ф и установки ГТУ-20 (завод "Салют"). На Николаевском заводе "Зоря-Машпроект" результаты расчетов применялись при проектировании опытных зубчатых колес для корабельных редукторов.

Недостаток математического моделирования, называемого также вычислительным экспериментом в том, что результаты отражают течение физических процессов, но не выражаются математическими формулами, например в виде формул (4) и (5), из которых можно получать законы течения процессов. Однако решение есть. Для этого надо многократно повторять расчеты и медленно изменять интересующий параметр. В качестве примера рассмотрим влияние степени точности на амплитуды боковых составляющих спектра мощности, затрачиваемой на генерацию вибраций зубчатого колеса. Результаты такого анализа показаны на рисунке 4.

Как следует из результатов анализа спектров, полученных моделированием с разными параметрами точности, боковые составляющие начинают реально проявляться в спектре колебаний только тогда, когда степень точности колес по нормам кинематической точности хуже восьмой. В современных авиационных зубчатых колесах такие погрешности не допускаются, но в эксплуатации при начале разрушения зубчатого колеса появление боковых составляющих в спектре может быть сигналом для прекращения эксплуатации механизма.

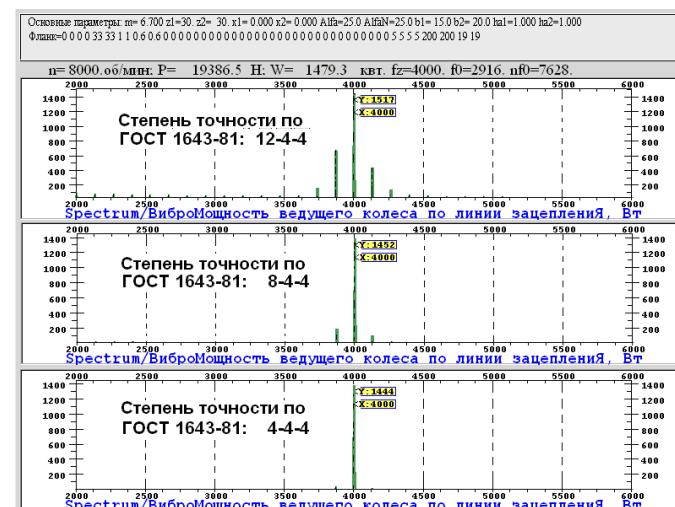


Рисунок 4 – Влияние степени кинематической точности на амплитуды боковых составляющих спектра колебаний вблизи зубцовой частоты

**Выводы.** Спектр колебаний зубчатой передачи состоит из множества частот, в которых доминирующими являются зубцовые частоты и их гармоники. Обратные частоты и их гармоники проявляются в низкочастотной части спектра. Наибольшая амплитуда колебаний имеет место на зубцовой частоте или на третьей гармонике этой частоты. Боковые составляющие спектра реально проявляются только в случае, если кинематическая погрешность или погрешность сборки превышает восьмую степень точности. Увеличение амплитуд колебаний в низкочастотной области указывает на нелинейные колебания в передаче, например колебания с разрывом контакта. Появление боковых составляющих от обратных частот вокруг гармоник зубцовой частоты указывает либо на низкую точность изготовления колес, либо характеризует начало процесса разрушения колес.

**Список литературы:** 1. Дорощев В.Л. Уточненное определение динамических нагрузок в зубчатых передачах // Вестник машиностроения. – 1985. – №8. – С.45-47. 2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 672с. 3. Дорощев В.Л. Основы технологии компьютерного моделирования полей напряжений методом комплексных аналитических функций // Новые технологии управления движением технических объектов // Материалы 3-й Международной научно-технической конференции. Том 2. – Новочеркасск, 2000. – С.104-109. 4. Дорощев В.Л. Программа AsGears – Расчет авиационных цилиндрических зубчатых передач. Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2005613152 от 6 декабря 2005г. 5. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: Изд. иностранной литературы, 1952. – 264с. 6. Поклад В.А., Яковлев В.А., Дорощев В.Л. Обеспечение работоспособности центрального привода двигателей в условиях повышенных вибраций // Авиационно-космическая техника и технология. – 9(56). – Харьков: ХАИ, 2008. – С.72-75. 7. Ананьев В.М., Дорощев В.Л., Капелевич А.Л. Новые подходы к проектированию зубчатых передач авиационных редукторов // Вісник НТУ "ХПІ": Зб. наук. праць. – Харьков, 2009. – Вып.20. – С.19-29. 8. Кравченко И.Ф., Единолич А.Б., Яковлев В.А., Дорощев В.Л. Экспериментальные и теоретические результаты исследования авиационных зубчатых передач для двигателей пятого и шестого поколений // Авиационно-космическая техника и технология. – Вып.8(55). – Харьков: ХАИ, 2008. – С.129-134.

Поступила в редколлегию 04.05.12